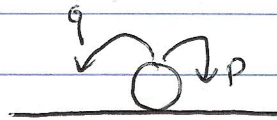
29/11/16

Άσκηση: Στον ελεύθερο απλό τυχ. περίπατο χωρίς αναπήδηση να εξετάσετε αν η κατάσταση 2 είναι ~~...~~ επαναληπτική ή παροδική. Δίνεται ότι: $k! \simeq \underbrace{k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k}\sqrt{2\pi}}_{\text{Stirling}}$
(α6κ-44 με $p=1/3$, $q=2/3$).

Λύση:



$p+q=1$ (=χωρίς αναπήδηση)

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} p, & z=1 \\ q, & z=-1 \end{cases} \quad \text{με } p+q=1.$$

$P_{22}^{(1)} = 0$ (επειδή δεν έχω αναπήδηση)

$P_{22}^{(2)} = 2p \cdot q$

$P_{22}^{(3)} = 0$. Για $n=2k+1$, $k=0,1,\ldots \Rightarrow \boxed{P_{22}^{(n)}=0}$

Για $n=2k$ έχω $2k$-βήματα με k-αριστερά και k-δεξιά ώστε να έχω αμετάβλητη τη θέση.

άρα
$$P_{22}^{(n)} = \begin{cases} 0, & n=2k+1 \\ \binom{2k}{k} p^k q^k, & k=2k \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k \cdot q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!\,k!} p^k \cdot q^k =$$

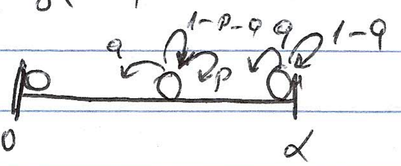
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2k} \cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot p^k q^k}{k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k} \cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot \cancel{2^{1/2}} \cdot \cancel{k^{2k}} \cdot k^{1/2}\, p^k \cdot q^k}{\cancel{k^{2k}} \cdot k \cdot \cancel{2^{1/2}} \cdot \sqrt{\pi}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4pq)^k}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{\pi}}}_{\text{Θέλω να δω πότε συγκλίνει/αποκλίνει.}}$$

- Αν $4pk < 1 \Rightarrow \sum < +\infty \Rightarrow$ $\Rightarrow$ η κατ/ση 2 έχει οριακή πιθ $=0 \Rightarrow$ παροδική.
- $4pq = 1$, έχω και $p+q=1 \Rightarrow p = q = 1/2$. Άρα αποκλίνει και άρα η κατάσταση 2 είναι επαναληπτική.
- $4pq > 1 = p+q = (p+q)^2 \Rightarrow (p+q)^2 - 4pq < 0 \Rightarrow (p-q)^2 < 0$ άτοπο.

Τυχαίος Περίπατος με 2 φράγματα ανάκλασης.

Έστω τυχ. περ. με 2 φρ. ανάκλ. στο 0 και στο α.
X_n: η σ.δ. που περιγράφει τη θέση του σωματιδίου τη n-οστή χρονική στιγμή. Η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται όπως στο σχήμα:



Είναι σ.δ. σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, \dots, \alpha\}$ (διακριτό) κ' πεπ/νο. Άρα έχω Μαρκοβιανή Αλυσίδα. (διακρ. χρόνος + + διακρ. χώρος + μαρκοβιανή ιδιότητα).

Πίνακας Μετάβασης

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \alpha-1 \\ \alpha \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & - & \alpha-1 & \alpha \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 1-p-q & p & 0 \dots & 0 \\ & & & & & \\ & & & q & 1-p-q & p \\ & & & & q & 1-q \end{bmatrix} \end{array}$$

Άρα Ομογενής.
$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \to 3 \dots \alpha-1 \leftrightarrow \alpha$
Άρα είναι και Μη-Διαχωρίσιμη.
Πεπ/νο πλήθος καταστάσεων που επικοινωνούν $\Rightarrow$ Θετικώς επ/κές.

Εργοδική?, Απεριοδική αφού $0 \to 0$ σε ένα βήμα $\Rightarrow d_0 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ΜΚΔ$\{d_0, \dots\} = 1$, Άρα θετ. επ/κή + απεριοδ. = εργοδική.

Για τις οριακές πιθ. μπορώ με Foster: $\Pi = \Pi \cdot P$
$\Pi_0 + \dots + \Pi_\alpha = 1$.

Να αποδ. ότι: (i) $P_{j0}^{(n)} = (1-p)P_{j0}^{(n-1)} + q P_{j1}^{(n-1)}$

$P_{ji}^{(n)} = p P_{j\,i-1}^{(n-1)} + (1-p-q) P_{ji}^{(n-1)} + q P_{j\,i+1}^{(n-1)}, \quad i = 1,\dots,\alpha-1$

$P_{j\alpha}^{(n)} = p P_{j\,\alpha-1}^{(n-1)} + (1-q) P_{j\alpha}^{(n-1)}$

(ii) Οριακές Πιθ.

<u>Λύση</u>: (i) $P_{j0}^{(n)} = P\begin{pmatrix}\text{να πάω από το } j \\ \text{στο } 0 \text{ σε } n\text{-βήματα}\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\text{να είμαι στο } n\text{-1 βήμα στο } 0 \\ \text{κ' αναπήδηση} \\ \text{ή στο } n\text{-1 στο } 1 \\ \text{και βήμα πίσω}\end{pmatrix}$ ξεκινώντας από j

$= \boxed{P_{j0}^{(n-1)} \cdot (1-p) + P_{j1}^{(n-1)} \cdot q}$

$j \to i$ σε n-βήματα:
- $j \to i$ σε $n-1$ κ' αναπήδηση ή
- $j \to i-1$ σε $n-1$ κ' $i-1 \to i$ ή
- $j \to i+1$ σε $n-1$ κ' βήμα πίσω ($i+1 \to i$)

άρα $P_{ji}^{(n)} = p \cdot P_{ji}^{(n-1)} + (1-p-q) P_{ji}^{(n-1)} + q P_{j\,i+1}^{(n-1)}$

Για $j \to \alpha$ σε n-βήματα:
$j \to \alpha$ σε $n-1$ κ' αναπήδηση ή $j \to \alpha-1$ σε $n-1$ κ' βήμα εμπρός

Άρα $P_{j\alpha}^{(n)} = p P_{j\,\alpha-1}^{(n)} + (1-q) P_{j\alpha}^{(n-1)}$

(ii) $\Pi_k = \lim_{n\to\infty} P_{jk}^{(n)}$

Παίρνοντας lim(*) για $n \to \infty$ στις σχέσεις από το (i) προκύπτει ότι:

$\Pi_0 = (1-p)\Pi_0 + q \cdot \Pi_1$
$\Pi_i = p \cdot \Pi_{i-1} + (1-p-q) \cdot \Pi_i + q \cdot \Pi_{i+1}$
$\Pi_\alpha = p \cdot \Pi_{\alpha-1} + (1-q)\Pi_\alpha$
με $\Pi_0 + \Pi_1 + \dots + \Pi_\alpha = 1$.

(*) το lim υπάρχει διότι έχω πεπερ. πλήθος καταστάσεων.

<u>Β' τρόπος</u> (Θ. Foster): $\Pi = \Pi \cdot P \Rightarrow (\Pi_0 \dots \Pi_\alpha) = (\Pi_0 \dots \Pi_\alpha) \cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow \Pi_0 = \Pi_0(1-p) + \Pi_1 \cdot q$
$\Pi_1 = \Pi_0 \cdot p + \Pi_1(1-p-q) + \Pi_2 \cdot q$
$\Pi_2 = \Pi_1 \cdot p + \Pi_2(1-p-q) + \Pi_3 \cdot q$
$\vdots$
$\Pi_\alpha = p \cdot \Pi_{\alpha-1} + (1-q) \cdot \Pi_\alpha$

και $\Pi_0 + \dots + \Pi_\alpha = 1$.

1ος τρόπος επίλυσης του συστήματος.

$$\pi_0 = (1-p)\pi_0 + q\pi_1 \Rightarrow \pi_0 \cdot p = q\cdot\pi_1 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{p}{q}\pi_0}$$

$$\pi_1 = p\pi_0 + (1-p-q)\pi_1 + q\cdot\pi_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 = q\cdot\pi_1 + (1-p-q)\pi_1 + q\cdot\pi_2 \Rightarrow p\pi_1 = q\pi_2 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1}$$

$$\text{ή } \boxed{\pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2\pi_0}$$

$$\pi_2 = p\cdot\pi_1 + (1-p-q)\pi_2 + q\pi_3 \Rightarrow \pi_2 = q\cdot\pi_2 + (1-p-q)\pi_2 + q\pi_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\pi_2 = q\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \left(\frac{p}{q}\right)\pi_2 \Rightarrow \boxed{\pi_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3\pi_0}$$

Άρα $\boxed{\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i\pi_0}$

$$\sum_{i=0}^{a}\pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^i\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 =$$

$$= \begin{cases} p\neq q \rightsquigarrow \pi_0\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \Rightarrow \pi_0\dfrac{(p/q)^{a+1}-1}{p/q-1} = 1 \Rightarrow \pi_0 = \dfrac{1-p/q}{1-(p/q)^{a+1}} \\ p=q \rightsquigarrow \pi_0\sum_{i=0}^{a}1 = 1 \Rightarrow \pi_0(a+1) = 1 \Rightarrow \pi_0 = \dfrac{1}{a+1} \end{cases}$$

$$\text{άρα } \pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i\pi_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{a+1}, & p=q \\ \left(\dfrac{p}{q}\right)^i\dfrac{1-p/q}{1-(p/q)^{a+1}}, & p\neq 2 \end{cases}$$

β' τρόπος: Ορίζουμε την $\pi(x) = \sum_{i=0}^{a}\pi_i x^i$

$x^0\pi_0 = \ldots$

$x^1\pi_1 = \ldots$

$\vdots$

$x^a\pi_a = \ldots$

$$\pi(x) = p\left(x^1\pi_0 + x^2\pi_1 + \ldots + x^a\pi_{a-1}\right) +$$
$$+(1-p-q)\left[x^1\pi_1 + x^2\pi_2 + \ldots + x^{a-1}\pi_{a-1}\right] +$$
$$+q\left[x^0\pi_1 + x^1\pi_2 + \ldots + x^{a-1}\cdot\pi_a\right] +$$
$$+ x^0\pi_0(1-p) + x^a(1-q)\pi_a =$$
$$= p\cdot x\left(\pi_0 + x^1\pi_1 + \ldots + x^{a-1}\pi_{a-1}\right) + (1-p-q)\left[x^1\pi_1 + \ldots + x^{a-1}\pi_{a-1}\right] +$$
$$+ \frac{q}{x}\left[x^1\pi_1 + x^2\pi_2 + \ldots + x^a\pi_a\right] + x^0\pi_0(1-p) + x^a(1-q)\pi_a =$$
$$= p\cdot x\left(\pi(x) - x^a\pi_a\right) + (1-p-q)\left(\pi(x) - x^0\pi_0 - x^a\pi_a\right) +$$
$$+ \frac{q}{x}\left(\pi(x) - \pi_0\right) + x^0\pi_0(1-p) + x^a\pi_a(1-q) =$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \Pi(x)\left(px^2-(p+q)x+q\right) = \left(p x^{a+1}\Pi_a - q\Pi_0\right)(x-1) \rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi(x) = \frac{\left(p x^{a+1}\Pi_a - q\Pi_0\right)(x-1)}{\left[px^2-(p+q)x+q\right]}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή είναι κ' ρίζες του αριθμητή.
Οι ρίζες είναι: 1 και q/p.

$$\text{άρα } \Pi(x) = \frac{\left(p x^{a+1}\Pi_a - q\Pi_0\right)\cancel{(x-1)}}{p\cancel{(x-1)}(x-q/p)}$$

Άρα q/p: ρίζα του αριθμητή $\Rightarrow p\dfrac{q^{a+1}}{p^{a+1}}\Pi_a - q\Pi_0 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_\alpha = \frac{p^\alpha}{q^\alpha}\Pi_0}$$

$$\text{άρα } \Pi(x) = \frac{p x^{a+1}\frac{p^\alpha}{q^\alpha}\Pi_0 - q\Pi_0}{p(x-q/p)} = \frac{\left(\frac{p^{a+1}}{q^{a+1}}x^{a+1}-1\right)\Pi_0}{\frac{p}{q}x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi(x) = \sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}x\right)^i\Pi_0} = \boxed{\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^i\Pi_0 x^i}$$

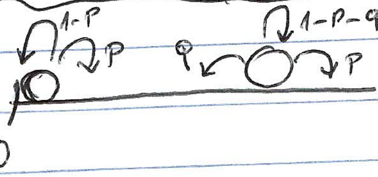
$$\text{άρα } \underbrace{\boxed{\Pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i\Pi_0}}, \quad \sum_{i=0}^{a}\Pi_i = 1$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{a+1}, & p=q \\ \dfrac{1-p/q}{1-(p/q)^{a+1}}\left(p/q\right)^i, & p \neq i \end{cases}$$

$$\Pi(x) = \sum_{i=0}^{a}\Pi_i x^i \Rightarrow \Pi'(x) = \sum i\Pi_i x^{i-1} \overset{x=1}{\Rightarrow} \Pi'(1) = \sum i\Pi_i = \text{μέση τιμή}$$

Στις πιθανογεννήτριες, η πιθανότητα $P(x=i)$ είναι ο συντελεστής του x^i.

Τυχαίος περίπατος με 1 φράγμα ανάκλασης



Έχω διακριτό χρόνο και χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2,\dots\}$

Έχω Μαρκοβιανή Ιδιότητα αφού μέλλον εξαρτάται μόνο απ' το παρόν. Μη-διαχ. Μαρκ. Αλυσίδα

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & 1-p & p & 0 & \cdots \\ 1 & q & 1-p-q & p & \\ 2 & 0 & q & 1-p-q & p \\ & & & q & \ddots \\ i & & & & \ddots \end{array}$$

Απεριοδική

Δεν μπορώ να πω για θετ. επική αφού δεν έχω πεπ/νο πλήθος κατ/σεων.

Ερώτημα: Οριακές πιθ.

α' τρόπος: (Αντίστροφο Θ. Foster)

$$x = x \cdot P$$

β' τρόπος: Τώρα έχω $\alpha \to +\infty$ άρα αρκεί να πάρω $\lim_{\alpha\to\infty}$ για τις οριακές πιθ. με 2 φρ. ανάκλασης

- Αν $p = q \Rightarrow \pi_i = 0$
- Αν $p/q > 1 \Rightarrow \nexists\, \pi_i$
- Αν $p/q < 1 \Rightarrow \pi_i = \left(p/q\right)^i \left(1 - p/q\right)$